

Chapter 5 가산성

5.1 점열, 제 1가산공간

1. X 를 비가산집합이라 하고 X 상에 여유한 위상 $\mathfrak{I}$ 를 주자.

X 상의 점열 (a_n) 가 $i \neq j$ 일 때 $a_i \neq a_j$ 인 경우 (a_n) 의 극한점이 있는가? 있다면 모두 구하여라.

『풀이』

$a \in X$, U 는 a 를 포함하는 열린집합이라 하자.

그러면 $U = X - \{x_1, \dots, x_k\}$ 를 만족하는 $x_i \in X$ 가 존재한다.

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{x_1, \dots, x_k\}$$

이라 하자.

(i) $A = \emptyset$

모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $a_n \in U$ 이다.

(ii) $A \neq \emptyset$

그러면 $i \neq j$ 일 때 $a_i \neq a_j$ 이므로 $\{n \mid a_n \in A\}$ 은 유한집합이다.

따라서 최댓값이 존재한다.

$$N = \max\{n \mid a_n \in A\}$$

라 하자. 그러면

$$n > N \Rightarrow a_n \in U$$

가 성립한다.

(i)과 (ii)에 의하여 a_n 은 a 에 수렴한다.

a 는 임의의 원소이므로 수렴점 전체의 집합은 X 이다.

※ X 를 비가산집합 대신 무한집합이라 고쳐도 위와 같은 방법으로 증명이 가능하다.

2. 비가산집합 X 에 여가산 위상 $\mathfrak{I}$ 를 주었을 때 X 상의 점열 (a_n) 의 극한점을 모두 구하여라.

『풀이』

$(X, \mathfrak{I})$: 여가산위상공간

$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow$ 유한항 이후로 모두 a 값을 갖는다.

즉, 적당한 자연수 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여 $n \geq N \Rightarrow a_n = a$

(i) X 는 비가산집합이므로 쌍마다 다른 점열 즉, $i \neq j$ 일 때 $a_i \neq a_j$ 인

점열 (a_n) 이 존재한다. 이 점열은 어떤 점에도 수렴하지 않는다.

(ii) $a_n \rightarrow a$ 라 가정하자. 그러면 적당한 자연수 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여

$$n \geq N \Rightarrow a_n = a$$

이 성립한다. $b (\neq a) \in X$ 에 대하여 $a_n \rightarrow b$ 라 하면 적당한 자연수 $N' \in \mathbb{N}$ 이 존재하여

$$n \geq N' \Rightarrow a_n = b$$

이 성립한다.

$$m = \max\{N, N'\}$$

이라 하면 $a = a_m = b$ 이므로 모순이다. 따라서 수렴하는 수열 (a_n) 은 유일한 점으로 수렴한다.

(i)과 (ii)에 의하여 $\{a \in X \mid a_n \rightarrow a\}$ 은 $\emptyset$ 또는 한 점 집합이다.

3. X 가 제 1가산공간인 경우 다음을 밝혀라.

- (1) U 는 X 에서 개집합 $\Leftrightarrow a_n \rightarrow a$ 이고 $a \in U$ 일 때 $\exists n_0$ s.t. $n \geq n_0$ 이면 $a_n \in U$
 (2) F 는 X 에서 폐집합 $\Leftrightarrow F$ 에서의 점열 (a_n) 가 $a_n \rightarrow a$ 일 때 $a \in F$ 이다.

『풀이』

(1) $(\Rightarrow)$ $a_n \rightarrow a$ 이고 $a \in U$ 라고 가정하자. U 는 개집합이므로 수렴의 정의에 의하여 $\exists n_0$ s.t. $n \geq n_0$ 이면 $a_n \in U$ 이 성립한다.

$(\Leftarrow)$ $a \in U$ 라 하자. X 는 제 1가산공간이므로 a 의 축소가산국소기저

$$\{G_n \mid n = 1, 2, \dots\}$$

가 존재한다. 모든 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $G_n \not\subset U$ 라 가정하면

$a_n \in G_n - U$ 인 $a_n \in X$ 이 존재한다. 각각의 $m \in \mathbb{N}$ 에 대하여

$$n \geq m \Rightarrow a_n \in G_m$$

이므로 a_n 은 a 에 수렴한다. 그러면 가정에 의하여

$$\exists n_0 \text{ s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U$$

이 성립한다. 특별히 $a_{n_0} \in U$ 가 성립한다. 하지만 이것은 $a_{n_0} \in G_{n_0} - U$ 에 모순이다. 따라서 적당한 G_k 에 대하여 $G_k \subset U$ 이 성립한다.

(2) $(\Rightarrow)$ F 에서의 점열 (a_n) 이 a 에 수렴한다고 가정하면 $a \in \overline{F}$ 이다.

F 는 폐집합이므로 $F = \overline{F}$ 이다. 따라서 $a \in F$ 이다.

$(\Leftarrow)$ $F \subset \overline{F}$ 는 자명하다. $a \in \overline{F}$ 라 하자. 그러면 X 는 제 1가산공간이므로

a 에 수렴하는 수열 $a_n \in F$ 이 존재한다. 그러면 가정에 의하여 $a \in F$ 이다.

4. (X, d) 를 거리공간이라 하고 (a_n) 을 X 에서의 한 점열이라 하자.

$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow d(a, a_n) \rightarrow 0$ 임을 보여라.

『풀이』

$\epsilon > 0$ 이라 하자.

($\Rightarrow$) $S_d(a, \epsilon)$ 는 a 를 포함하는 열린집합이므로 적당한 자연수 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여

$$n \geq N \Rightarrow a_n \in S_d(a, \epsilon) \Rightarrow d(a, a_n) < \epsilon.$$

($\Leftarrow$) $d(a, a_n) \rightarrow 0$ 이므로 적당한 자연수 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여

$$n \geq N \Rightarrow |d(a, a_n) - 0| < \epsilon \Rightarrow d(a, a_n) < \epsilon \Rightarrow a_n \in S_d(a, \epsilon).$$